

ZÁKLADY VÝROKOVÉ LOGIKY

V matematice se setkáváme s různými symboly:

konstanty - mají pevný význam (např. 1; 3; $e = 2,718281828$; -5; π , $\sqrt{2}$)

proměnné - nemají přesně stanovený význam, ale můžeme za ně konstanty vhodným způsobem dosazovat. (např. „celé číslo x “, „trojnásobek přirozeného čísla x “, „přímka p “)

- **VÝROK** = sdělení (oznamovací věta), o němž má smysl říci, že je pravdivé nebo nepravdivé.
- Pravdivý výrok označujeme pravdivostní hodnotou **1**.
- Nepravdivý výrok označujeme pravdivostní hodnotou **0**.
- Každý výrok je buď pravdivý nebo nepravdivý, ve výjimečných případech nelze o pravdivosti výroku v danou chvíli rozhodnout (takový výrok nazýváme hypotéza). Ale obecně výrok nabývá pouze jedné ze dvou pravdivostních hodnot, tedy buď jedničku nebo nulu.

Př.

Brno najdeme na mapě mezi Prahou a Bratislavou.	-	pravdivý výrok
Brnem protéká řeka Vltava.	-	nepravdivý výrok
Domácí potřeby.	-	není výrok
Mimo naši sluneční soustavu žijí myslící bytosti.	-	výrok, o němž momentálně neumíme rozhodnout, zda je pravdivý nebo není (hypotéza)
Číslo x je dělitelné třemi.	-	není výrok (výrok se z tohoto sdělení stane až po dosazení za proměnnou x) – tzv. <u>výroková funkce</u>

- Výroky, které se skládají z jedné oznamovací věty, vypovídají o jedné skutečnosti nazýváme **jednoduchými výroky** (tzv. **atomické výrokové formule**) - značí se velkými písmeny: $A, B, C, \dots, V, W, \dots$.
Neprázdnou množinu atomických výrokových formulí označujeme **P**.

Pravdivostní ohodnocení atomických výrokových formulí - zobrazení $p: P \rightarrow \{0, 1\}$.

Nastane tedy jedna ze dvou možností: $p(A) = 0$ (je-li výrok A nepravdivý)

$p(A) = 1$ (je-li výrok A pravdivý)

Př.

A: Venku prší. - je to výrok (podle počasí, které je v tuto chvíli, můžeme říct, zda je pravdivý či není).

- **Složený výrok** (výroková formule) = výrok, který vznikne spojením jednoho a více jednoduchého výroku prostřednictvím tzv. logických spojek. Značíme malými řeckými písmeny $\alpha, \beta, \dots, \varphi, \rho, \sigma, \psi, \dots$.

LOGICKÉ SPOJKY

Název logické spojky	Označení	Slovní vyjádření
negace	$\neg A$	není pravda, že A
konjunkce	$A \wedge B$	A a (současně) B
disjunkce	$A \vee B$	A nebo B
implikace	$A \Rightarrow B$	jestliže A , pak B
ekvivalence	$A \Leftrightarrow B$	A právě když B

- **negace** výroku je výrok, který má opačnou pravdivostní hodnotu než výrok původní. Formulace negace pomocí slovního vyjádření „není pravda, že“ bývá obvykle jazykově kostrbatá. Proto se raději používá jiné slovní vyjádření. (např. negace výroku: „Číslo 8 je dělitelné 7“ je „Není pravda, že je číslo 8 dělitelné 7“, ale lepší vyjádření je: „Číslo 8 není dělitelné 7“.)

$p(A)$	$P(\neg A)$
1	0
0	1

tabulka pravdivostních hodnot pro negaci:

tabulka pravdivostních hodnot pro ostatní logické spojky:

p(A)	p(B)	p($A \wedge B$)	p($A \vee B$)	p($A \Rightarrow B$)	P($A \Leftrightarrow B$)
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

- **konjunkce** výroků je pravdivá jedině v případě, že oba výroky A, B jsou pravdivé.
- **disjunkce** (alternativa) výroků je pravdivá, je-li pravdivý alespoň jeden z výroků A, B (tj. jeden, resp. druhý, resp. oba dva) !!!! spojka „nebo“ zde nemá vylučovací význam „buď to nebo to“ jak je tomu běžné v hovorové řeči.
- **implikace** výroků A,B je nepravdivá pouze v případě, že první výrok (A) je pravdivý a druhý výrok v pořadí (B) je nepravdivý. Ve všech ostatních případech je implikace pravdivá. !!!! Tj. implikace je pravdivá i v tom případě, že první výrok (A) je nepravdivý (na pravdivostní hodnotě výroku B pak již nezáleží).
- **ekvivalence** výroků A,B je pravdivá v případě, že oba výroky jsou současně pravdivé nebo nepravdivé. Je-li ekvivalence pravdivá, nazýváme výroky A, B ekvivalentní. Píšeme $A \sim B$.

Velká část matematických úvah představuje tvoření a zápis ekvivalencí.

Př.

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg A \Rightarrow B$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B)$$

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

Pro negace složených výroků platí následující ekvivalence:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

Mezi důležité ekvivalence patří také: $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A$ tzv. obměněná implikace

POZOR: obměněná implikace se liší od obrácené implikace: $B \Rightarrow A$

• TAUTOLOGIE

Výroková formule, která je vždy pravdivá, bez ohledu na pravdivost jednoduchých výroků, ze kterých se skládá.

Př. Mezi tautologie patří např.

1)	$\neg(P \wedge \neg P)$	
2)	$P \vee \neg P$	- zákon vyloučeného třetího
3)	$P \Leftrightarrow P$	- zákon totožnosti
4)	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	- zákon dvojí negace
5)	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	- de Morganovo pravidlo
6)	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$	- de Morganovo pravidlo
7)	$[(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P] \Rightarrow P$	- Pierceův zákon

Př. Dalšími tautologiemi jsou např. tyto ekvivalence:

$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	tzv. komutativní zákon
$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	
$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	tzv. asociativní zákon
$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$	
$A \wedge A \Leftrightarrow A$	tzv. idempotentní zákon
$A \vee A \Leftrightarrow A$	
$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	tzv. distributivní zákon
$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	

• KONTRADIKCE

Výroková formule, která je vždy nepravdivá, bez ohledu na pravdivost jednoduchých výroků, ze kterých se skládá.

• VÝROKOVÁ FORMULE V DISJUNKTIVNÍM NORMÁLNÍM TVARU

Výroková formule je v disjunktivním normálním tvaru, je-li disjunkcí formulí, v nichž platí:

- (a) každá je konjunkcí atomických formulí a jejich negací
- (b) v žádné se nevyskytuje žádná atomická formule současně se svou negací.

Disjunktivní normální tvar se nazývá úplný pokud se ve všech konjunkcích vyskytují stejné atomické formule.

Př. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$

Platí: Libovolná výroková formule je ekvivalentní formuli v úplném disjunktivním normálním tvaru. (tj. každou výrokovou formuli mohu napsat jako formuli v úplném disjunktivním normálním tvaru.)

• VÝROKOVÁ FORMULE V KONJUNKTIVNÍM NORMÁLNÍM TVARU

Výroková formule je v konjunktivním normálním tvaru, je-li konjunkcí formulí, v nichž platí:

- (a) každá je disjunkcí atomických formulí a jejich negací
- (b) v žádné se nevyskytuje žádná atomická formule současně se svou negací.

Konjunktivní normální tvar se nazývá úplný pokud se ve všech disjunkcích vyskytují stejné atomické formule.

Stručný popis syntaktického přístupu k výstavbě výrokové logiky:

Pomocí logických spojek, závorek a atomických výroků se vytváří **jazyk výrokové formule (výrokový kalkul)**.

Výrokový kalkul nám umožňuje a upřesňuje, jak správně tvořit z výroků jednodušších výroky složitější a jak pravdivost těchto výroků závisí na pravdivosti příslušných výroků jednodušších.

Jako L_p označujeme množinu symbolů výrokové logiky = tzv. abeceda výrokového kalkulu

Abeceda: 1) A, B, C, (znaky pro atomické výrokové formule)
2) logické spojky (negace, konjunkce, disjunkce, implikace, ekvivalence)
3) (,)

Syntaktické pravidlo pro vytváření slov (výrokových formulí):

- 1) Každá atomická výroková formule (=výroková proměnná) je výrokovou formuli
- 2) Jsou-li ϕ, ψ výrokové formule, pak jsou také $\neg(\phi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \Rightarrow \psi)$, $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ výrokové formule.
- 3) Každá výroková formule vznikne konečným počtem použití pravidel 1) a 2).

Logická ekvivalence výrokových formulí:

Výrokové formule ϕ, ψ jsou logicky ekvivalentní (zapisujeme $\phi \equiv \psi$), když platí:

- 1) každá atomická výroková formule (výroková proměnná), která se vyskytuje ve ϕ , se vyskytuje ve ψ a každá výroková proměnná, která se vyskytuje ve ψ , se vyskytuje ve ϕ .
- 2) výrokové formule ϕ, ψ jsou ekvivalentní (tj. ekvivalence mezi těmito formulemi je pravdivá $\rightarrow$ výrokové formule ϕ, ψ musí mít stejnou pravdivostní hodnotu).

Př. $(A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$

ZÁKLADY PREDIKÁTOVÉ LOGIKY

Predikátová logika a jazyk predikátových formulí se týká výrokových funkcí neboli predikátových formulí.

- **VÝROKOVÁ FUNKCE (VÝROKOVÁ FORMA, PREDIKÁTOVÁ FORMULE)** – sdělení obsahující jednu nebo více proměnných, z něhož se po dosazení (přípustných) konstant na místo všech proměnných stane výrok (ať už pravdivý nebo nepravdivý)

Př. $x^2 - y^2$, $(x, y \in R)$ není predikátová formule, po dosazení za x a y nedostaneme žádný výrok

Číslo x je dělitelné pěti ($x \in Z$)predikátová formule.

Číslo x je po odečtení čísla 5 větší než číslo y ($x, y \in R$) predikátová formule

Otec pana x. $x \in U$, U je množina lidí.není predikátová formule. Po dosazení za x nedostaneme výrok.

Je-li $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ výroková funkce obsahující proměnné $x_1, x_2, \dots, x_n$, pak definiční obor predikátové formule je množina všech n-tic $(a_1, \dots, a_n)$ takových, že $V(a_1, \dots, a_n)$ je výrok. Obor pravdivosti predikátové formule $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je množina všech n-tic z definičního oboru, po jejichž dosazení za proměnné obdržíme pravdivý výrok.

!!!! Další možností jak získat z predikátové formule výrok je tzv. kvantifikace proměnných.

• KVANTIFIKOVANÝ VÝROK

Výrok, který vznikl z predikátové formule tzv. kvantifikací proměnných. Kvantifikace proměnných spočívá v tom, že nějak udáme počet proměnných, tím vznikne z predikátové formule buď pravdivý nebo nepravdivý výrok. (tj. Kvantifikované výroky jsou takové výroky, které udávají počet.)

Příklady kvantifikátorů: „každý“ ; „právě ...“ ; „alespoň....“ ; „nejvýše jeden“ atd.

Př. Predikátová formule:	„celé číslo x je menší než 5“	
Kvantifikované výroky:	„Každé celé číslo x je menší než 5.“	 nepravdivý výrok
	„Právě jedno celé číslo x je menší než 5.“	 nepravdivý výrok
	„Alespoň dvě celá čísla x jsou menší 5.“	 pravdivý výrok
	„Nejvýše pět celých čísel je menších než 5.“	 nepravdivý výrok

Nejčastěji používané kvantifikátory:

- **obecný kvantifikátor** = „pro každý prvek (z definičního oboru predikátové formule nebo jeho části) platí....“.
Označuje se symbolem $\forall$.
- **Existenční kvantifikátor** = „existuje (alespoň jeden) prvek (z definičního oboru predikátové formule nebo jeho části), pro který platí....“ . Označuje se symbolem $\exists$.

Př. „Každé přirozené číslo x je větší než 0.“ pravdivý výrok s obecným kvantifikátorem
„Existuje celé číslo x , které je větší než jeho druhá mocnina (x^2)...“ nepravdivý výrok s existenčním kvantifikátorem

Negace kvantifikovaných výroků:

„pro každý prvek z oboru U platí W “	negace	„existuje prvek z oboru U , pro který neplatí W “
„existuje prvek z oboru U , pro který platí W “	negace	„pro každý prvek z oboru U neplatí W “

Poznámka:

Slovo „pro každý“ se někdy nahrazuje slovem „pro všechna“, v negaci pak lze použít slova „žádný“.

• volná a vázaná proměnná

Vázaná proměnná je proměnná, která se ve formuli vyskytuje ve spojení s kvantifikátorem.

Volná proměnná je každá proměnná, která není v predikátové formuli vázaná.

Zavádíme ještě pojem tzv. podstatně volná proměnná – proměnná, která se v predikátové formuli vyskytuje a není vázaná.

Pozn.: tedy volná proměnná je i ta, která se v predikátové formuli vůbec nevyskytuje, zatímco podstatně volná proměnná musí být ve formuli přítomná.

• uzavřená formule (sentence)

Formule bez podstatně volných proměnných.

Př. $(\exists x)(2/x < y)$ - jedná se o predikátovou formuli, ve které je x vázaná proměnná, y je podstatně volná proměnná.

- **atomická predikátová formule** (predikát) – formule ve tvaru $x_i = x_j$, kde $x_{i,j}$ jsou proměnné.

Stejně jako u výrokových formulí lze i u predikátových formulí hovořit o tautologii a kontradikci predikátové formule.

Stručný popis syntaktického přístupu k výstavbě výrokové logiky:

Stejně jako u výrokové logiky zavádí se i u predikátové logiky **jazyk predikátové logiky (predikátový kalkül)**.

Abeceda:	1) $x_1, x_2, \dots, x_n$ (proměnné)
	2) $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ (logické spojky)
	3) $\forall, \exists$ (kvantifikátory)
	4) $=$ (rovnost)
	(,) (závorky)
	5) $R, \dots$ (symboly pro relace)
	6) $f, \dots$ (symboly pro operace)

- **predikát** – tak označujeme určitý vztah mezi počtem proměnných (objektů).
- **Primitivní predikát** je nejjednodušší formule. Každé matematické teorie má své vlastní primitivní predikáty. Jsou to formule, z nichž se po dosazení konstant za proměnné stanou atomické výroky dané teorie (např. v aritmetice formule „ $x < y$ “)