

Univerzita Karlova v Praze
Pedagogická fakulta

SEMINÁRNÍ PRÁCE Z METOD ŘEŠENÍ ÚLOH 2
DŮKAZY

Důkazy matematických vět¹

Axiomy

Axiomy jsou matematické výroky, které jsou považovány za pravdivé a nedokazují se.

Definice

Definice využívá základní pojmy (nebo pojmy dříve zavedené) k určení názvu a charakteristických vlastností nového pojmu.

Matematická věta

Matematická věta je pravdivý matematický výrok, který je odvozený na základě axiomů, definic a dříve dokázaných vět.

Důkaz přímý

Matematickou větu ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$ dokážeme pomocí řetězce implikací. Je-li A axiom nebo platná (dříve dokázaná) věta, pak z platnosti všech implikací $A \Rightarrow A_1, A_1 \Rightarrow A_2, \dots, A_n \Rightarrow B$ plyne platnost implikace $A \Rightarrow B$, tedy i výroku B .

Důkaz nepřímý

Při nepřímém důkazu nahradíme větu původní ($A \Rightarrow B$) větou obměněnou ($B' \Rightarrow A'$), která má stejnou pravdivostní hodnotu.

Důkaz sporem

Důkaz sporem provádíme ve třech krocích:

1. Provedeme negaci A' původního výroku A .
2. Vytvoříme řetězec implikací $A' \Rightarrow B_1, B_1 \Rightarrow B_2, \dots, B_{n-1} \Rightarrow B_n$, kde výrok B_n neplatí – **logický spor**.
3. Negovaný výrok A' neplatí, platí původní výrok A .

Důkaz matematickou indukcí

Důkaz se používá pro ověření platnosti tvrzení, která se týkají vlastností přirozených čísel.

Postup při dokazování je rozdělen do dvou kroků:

1. Dokážeme, že věta platí pro nejmenší přirozené číslo n_0 z oboru proměnné (není-li určeno jinak, dokazujeme větu pro $n_0 = 1$).
2. Předpokládáme, že věta platí pro libovolné přirozené číslo $k > n_0$ a dokážeme, že platí i pro přirozené číslo $k + 1$. Tato část důkazu se nazývá **indukční krok**.

Jestliže tedy věta platí pro první prvek dané množiny a pro každý prvek, který následuje za libovolným prvkem této množiny, potom platí pro každý prvek dané množiny přirozených čísel.

¹ Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.

Přímý důkaz I²

Zadání:

Přímým důkazem na základě rozboru ověřte, že platí

$$\sqrt{11+\sqrt{10}} < 1 + \sqrt{11-\sqrt{10}}.$$

Vypracování:

Rozbor: Vyvodíme důsledky z předpokladu, že daný výrok platí.

$$\begin{aligned}\sqrt{11+\sqrt{10}} < 1 + \sqrt{11-\sqrt{10}} &\Rightarrow 11 + \sqrt{10} < 12 + 2\sqrt{11-\sqrt{10}} - \sqrt{10} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\sqrt{10} - 1 < 2\sqrt{11-\sqrt{10}} \Rightarrow 41 - 4\sqrt{10} < 4(11 - \sqrt{10}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 41 < 44 \Rightarrow 0 < 3\end{aligned}$$

(ve všech krocích jsou nezáporná čísla a byla zachována nerovnost)

Důkaz na základě rozboru:

$$\begin{aligned}0 < 3 &\Rightarrow 41 < 44 \Rightarrow 41 - 4\sqrt{10} < 44 - 4\sqrt{10} \Rightarrow 40 - 4\sqrt{10} + 1 < 4(11 - \sqrt{10}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\sqrt{10} - 1 < 2\sqrt{11-\sqrt{10}} \Rightarrow 12 + \sqrt{10} - 1 < 12 + 2\sqrt{11-\sqrt{10}} - \sqrt{10} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 11 + \sqrt{10} < 1 + 2\sqrt{11-\sqrt{10}} + 11 - \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{11+\sqrt{10}} < 1 + \sqrt{11-\sqrt{10}}\end{aligned}$$

Při obráceném postupu musíme provádět úpravy, které vedou od jednoduššího výrazu ke složitějšímu, často vytváříme druhé mocniny dvojčlenů a ty odmocňujeme (pokaždé se ujistíme, že základ mocniny je nezáporný). Nalezli jsme vhodný začátek řetězce – platný výrok $0 < 3$ – a sestrojili jsme řetězec implikací, který končí dokazovaným výrokem. Daný výrok je dokázán přímým důkazem.

Anekdota:³

Přednášku P.Čebyševa (1821 – 1894) v Paříži o matematické teorii tvorby šatů navštívili nejen krejčí předních pařížských závodů, ale i zástupci různých Maisons de haute couture (módních domů) a vyznavači módních novinek. Čebyšev začal svoji přednášku slovy: „Pro jednoduchost předpokládejme, že lidské tělo má tvar koule.“ Zbytek přednášky však již pronesl bez tohoto auditoria, neboť šokovaná veřejnost bez prodlení odešla.

² Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 49/2c

³ Beran, L. – Ondráčková, I.: Provéřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.

Přímý důkaz II⁴

Zadání:

Přímým důkazem ověřte, že platí

$$\cot 20^\circ \in Q \Rightarrow \cos 40^\circ \in Q.$$

Vypracování:

Klíčem ke konstrukci potřebného řetězce implikací je konstrukce výrazu $\cos 40^\circ$ pomocí čísla $\cot 20^\circ$. Upravme obecný vzorec

$$\cot \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}.$$

V prvním kroku umocníme

$$\cot^2 \frac{x}{2} = \frac{(1 + \cos x)^2}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x},$$

a pak vyjádříme $\cos x$

$$\cot^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$\cot^2 \frac{x}{2} \cdot (1 - \cos x) = 1 + \cos x$$

$$\cot^2 \frac{x}{2} - 1 = \cos x + \cos x \cdot \cot^2 \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \frac{\cot^2 \frac{x}{2} - 1}{\cot^2 \frac{x}{2} + 1}$$

Důkazem dané implikace je potom tento řetězec implikací:

$$\begin{aligned} \cot 20^\circ \in Q &\Rightarrow \cot^2 20^\circ \in Q \Rightarrow (\cot^2 20^\circ - 1 \in Q) \wedge (\cot^2 20^\circ + 1 \in Q) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\cot^2 20^\circ - 1}{\cot^2 20^\circ + 1} \in Q \Rightarrow \cos 40^\circ \in Q \end{aligned}$$

Motto:⁵

G. N. Berman: „...matematik pracuje jako každý přírodovědec: vytváří domněnky (hypotézy), prověřuje je pomocí pozorování a svérázné matematické zkušenosti, hledá analogie atp. Když však získá výsledek uhodnutím nebo ze zkušenosti, musí jej korektně dokázat. Jinak vždy zůstává obava, že vyslovený výrok může být chybný.“

⁴ Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 49/1a

⁵ Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.

Přímý důkaz III⁶

Zadání:

Přímým důkazem ověřte, že platí

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 0,5.$$

Vypracování:

Neboť

$$1. \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$2. \quad \cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

je

$$\begin{aligned} \cos 36^\circ - \cos 72^\circ &= \cos 36^\circ - (2\cos^2 36^\circ - 1) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} - 2\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 + 1 = \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{4} - \frac{2(6 + 2\sqrt{5})}{16} + 1 = \frac{4 + 4\sqrt{5} - 12 - 4\sqrt{5} + 16}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Přímý důkaz IV⁷

Zadání:

Najděte přímý důkaz věty

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : x^2 y + xy^2 \leq x^3 + y^3.$$

Vypracování:

Rozbor:

Vyvodíme důsledky z předpokladu, že daný výrok platí.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : x^2 y + xy^2 \leq x^3 + y^3 \Rightarrow xy(x + y) \leq (x + y)(x^2 - xy + y^2),$$

protože výraz $x + y$ je kladný, můžeme jím vydělit celou nerovnost

$$\Rightarrow xy \leq x^2 - xy + y^2 \Rightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow 0 \leq (x - y)^2$$

Důkaz na základě rozboru:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq (x - y)^2 &\Rightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow xy \leq x^2 - xy + y^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow xy(x + y) \leq (x + y)(x^2 - xy + y^2) \Rightarrow x^2 y + xy^2 \leq x^3 + y^3 \end{aligned}$$

Podali jsme důkaz dané věty, a to na základě rozboru, který nám ukázal začátek vhodného řetězce implikací.

⁶ Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 49/1c

⁷ Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 50/3c

Důkaz nepřímý I⁸

Zadání:

Dokažte, že neexistuje žádné $n \in \mathbb{N}$, pro které by platilo:

$$(n+1)! + (n+2)! > n! + (n+3)!.$$

Vypracování:

Rozbor:

Důkaz neexistence provedeme tímto způsobem:

Dokážeme, že platí $M \subset \{ \}$ ⁹, což je ekvivalentní s $M = \{ \}$.

1. dokážeme větu $\forall x \in U : x \in M \Rightarrow x \in W$, tj. $M \subset W$
2. ukážeme, že $W = \{ \}$, proto i $M = \{ \}$

Řešení:

Zkoumanou množinou M je obor pravdivosti dané rovnice v množině přirozených čísel $\mathbb{N}$. Postupnými úpravami této rovnice z ní odvodíme jinou, jejíž obor pravdivosti W umíme určit.

$$\begin{aligned} & (n+1)! + (n+2)! > n! + (n+3)! \\ & n!(n+1) + n!(n+1)(n+2) > n! + n!(n+1)(n+2)(n+3) \\ & (n+1)(1+n+2) > 1 + (n+1)(n+2)(n+3) \\ & (n+1)(n+3) > 1 + (n+1)(n+2)(n+3) > (n+1)(n+2)(n+3) \\ & 0 > n+2 \end{aligned}$$

Proto pro $\forall n \in \mathbb{N}$: Je-li $(n+1)! + (n+2)! > n! + (n+3)!$... $n \in M$

$\Downarrow$

pak $0 > n+2$... $n \in W$

Dokázali jsme, že platí $M \subset W$. Přitom $W = \{ \}$, protože po dosazení jakéhokoli přirozeného čísla n není nerovnost splněna. Je tedy $M \subset \{ \}$, ale to znamená, že $M = \{ \}$.

- Aplikovali jsme postup důkazu neexistence, který je jako celek nepřímým důkazem (místo $M = \{ \}$ dokazujeme $M \subset \{ \}$). Jeho první krok ale zahrnuje zpravidla dost rozsáhlý přímý důkaz, proto se někdy hovoří o přímém důkazu neexistence.

⁸ Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 63/1a

⁹ MS Word neumí (podle mne) napsat přeškrtnutou nulu ($\emptyset$), která je zavedena pro označení prázdné množiny, a proto používám složené závorky.

Důkaz sporem I¹⁰

Zadání:

Dokažte, že číslo $\log 5$ je iracionální.

Vypracování:

Jde o dekadický logaritmus pěti; zvolíme důkaz sporem, vyslovíme negaci daného výroku, tj. výrok „ $\log 5$ je racionální číslo“.

Jestliže $\log 5 \in \mathbb{Q}$, pak existují $r, s \in \mathbb{N}$ taková, že $\log 5 = \frac{r}{s}$, pak $5 = 10^{\frac{r}{s}}$, dále pak $5^s = 10^r$.

Odvodili jsme výrok „ $\exists r, s \in \mathbb{N} : 5^s = 10^r$ “, který neplatí, protože číslo 5^s končí pětkou pro každé $s \in \mathbb{N}$ a číslo 10^r končí nulou pro každé $r \in \mathbb{N}$.

Kdyby neplatil výrok $\log 5 \notin \mathbb{Q}$, musel by platit výrok negovaný – $\log 5 \in \mathbb{Q}$. Jak jsme však ukázali není tato podmínka splněna, tj. došli jsme ke sporu, a tedy platí $\log 5 \notin \mathbb{Q}$.

Důkaz sporem II¹¹

Zadání:

Dokažte, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální.

Vypracování:

Zvolíme důkaz sporem, vyslovíme negaci daného výroku, tj. výrok „ $\sqrt{2}$ je racionální číslo“. Jestliže $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, pak existují $r, s \in \mathbb{N}$ taková, že $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$, kde r, s jsou nesoudělná čísla. Rovnost upravíme $2s^2 = r^2$. Z této rovnice plyne, že r^2 je sudé, proto i r je sudé a dá se vyjádřit ve tvaru $r = 2r_1$. Dosadíme-li nazpět bude $s^2 = 2r_1^2$ a obdobně zjistíme, že s je také sudé. Jsou-li však čísla r, s sudá, pak jsou soudělná, což odporuje předpokladu, tj. došli jsme ke sporu. Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální

¹⁰ Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 57/2

¹¹ Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 57/3

Důkaz nepřímý II¹²

Zadání:

Dokažte, že platí obecná věta:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \text{ není druhou mocninou přirozeného čísla} \Rightarrow \sqrt{n} \notin \mathbb{Q},$$

Vypracování:

Princip nepřímého důkazu spočívá v dokázání věty obměněné, tj. v našem případě

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow n \text{ je druhou mocninou přirozeného čísla}$$

Je-li $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, pak platí: $\sqrt{n} = \frac{r}{s}$, $r, s \in \mathbb{N}$. Rovnost upravíme: $s\sqrt{n} = r$. Protože

jsou čísla r a s přirozená musí být přirozené i číslo $\sqrt{n}$, protože

- bylo-li by iracionální, pak součin s přirozeným číslem (s) na levé straně rovnice $s\sqrt{n} = r$ bude iracionální, jenže číslo na pravé straně je přirozené (nenastala by rovnost)
- bylo-li by racionální necelé, pak jeho mocnina je též racionální necelá a to je ve sporu s předpokladem $\forall n \in \mathbb{N}$

Protože je číslo $\sqrt{n}$ přirozené je n druhou mocninou přirozeného čísla.

Dokázali jsme obměněnou větu a tím i větu původní.

Důkaz nepřímý III¹³

Zadání:

Dokažte větu:

$$\forall n \in \mathbb{N} : 10 \mid n^2 + 6 \Rightarrow 5 \nmid n$$

Vypracování:

Uplatníme nepřímý důkaz – dokážeme obměnu věty, tj. výrok

$$\forall n \in \mathbb{N} : 5 \mid n \Rightarrow 10 \nmid n^2 + 6.$$

Důkaz

$$5 \mid n \Rightarrow 5 \mid n^2 \Rightarrow 5 \nmid n^2 + 6 \Rightarrow 10 \nmid n^2 + 6.$$

Dokázali jsme, že platí $5 \mid n \Rightarrow 10 \nmid n^2 + 6$ a proto platí i $10 \mid n^2 + 6 \Rightarrow 5 \nmid n$.

Dokázali jsem obměnu původní věty, platí tedy i původní věta.

¹² Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 57/6

¹³ Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 58/9

Důkaz sporem III¹⁴

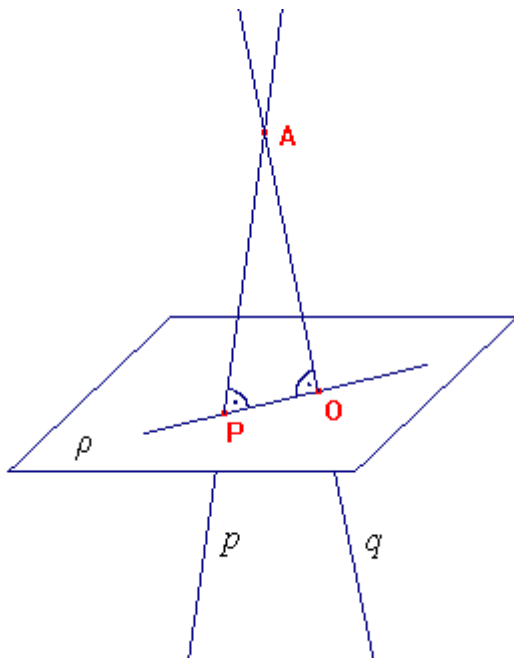
Zadání:

Dokažte, že každým bodem A , který neleží v rovině ρ , prochází nejvýš jedna přímka p kolmá na rovinu ρ . Nakreslete obrázek.

Vypracování:

Podáme důkaz sporem. Vyslovená věta má tuto negaci: Existuje aspoň jeden bod A , který neleží v rovině ρ a kterým procházejí aspoň dvě přímky p kolmé na rovinu ρ .

Ilustrační obrázek 1 ukazuje dvě přímky p, q , které procházejí bodem A a jsou „kolmé“ na rovinu ρ . (Kolmost je ovšem jen vyjádřena značkami, ve skutečnosti svírají přímky ostré úhly málo odlišné od pravých.)



obrázek 1

Platí-li negace původní věty, pak vzniká (tj. existuje) trojúhelník APQ , který má dva vnitřní úhly pravé, a tudíž součet vnitřních úhlů větší než 180° , což je spor. Uzavíráme, že negace původní věty neplatí, platí tedy původní věta.

¹⁴ Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 58/12.

Přímý důkaz V¹⁵ Dirichletův přihrádkový princip

Zadání:

Dokažte, že v každém čtverci s rozměry $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$, kde je zakresleno 101 bodů, existuje trojúhelník o obsahu 1 cm^2 , který obsahuje aspoň dva s daných bodů.

Vypracování:

Obsah zadaného čtverce je 100 cm^2 . Lze do něj tedy vepsat právě sto různých trojúhelníků o obsahu 1 cm^2 . Kdyby v každém z těchto trojúhelníků ležel právě jen jeden bod, bylo by těchto bodů sto. V celém čtverci jich je však zakresleno stojedna. Proto alespoň jeden z trojúhelníků musí obsahovat alespoň dva body.

Důkaz indukcí I¹⁶

Zadání:

Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} : \sin^{2n} x + \cos^{2n} x \leq 1$.

Vypracování:

I. Ověříme platnost pro $n = 1$. Platí

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Nerovnost je splněna.

II. Indukční krok.

Předpokládejme, že dokazovaná nerovnost platí pro nějaké $n = k \in \mathbb{N}$, tj. platí $\sin^{2k} x + \cos^{2k} x \leq 1$. Máme dokázat, že za tohoto předpokladu dokazovaná nerovnost platí také pro $n = k + 1$, tj. platí

$$\sin^{2(k+1)} x + \cos^{2(k+1)} x \leq 1.$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} \sin^{2(k+1)} x + \cos^{2(k+1)} x &= \sin^{2k+2} x + \cos^{2k+2} x = \sin^2 x \cdot \sin^{2k} x + \cos^2 x \cdot \cos^{2k} x <^{(\Downarrow)} \\ &< \sin^2 x \cdot \sin^{2k} x + \sin^2 x \cdot \cos^{2k} x + \sin^{2k} x \cdot \cos^2 x + \cos^2 x \cdot \cos^{2k} x = \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^{2k} x + \cos^{2k} x) \leq 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Poznámka:

Ostrá nerovnost $(\Downarrow)$ je zřejmě splněna, neboť jsme k pravé straně nerovnosti přičetli nezáporný výraz $\sin^2 x \cdot \cos^{2k} x + \sin^{2k} x \cdot \cos^2 x$.

Tím jsem dokázali i druhý krok matematické indukce. Dokazovaná věta platí.

¹⁵ Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 69/7

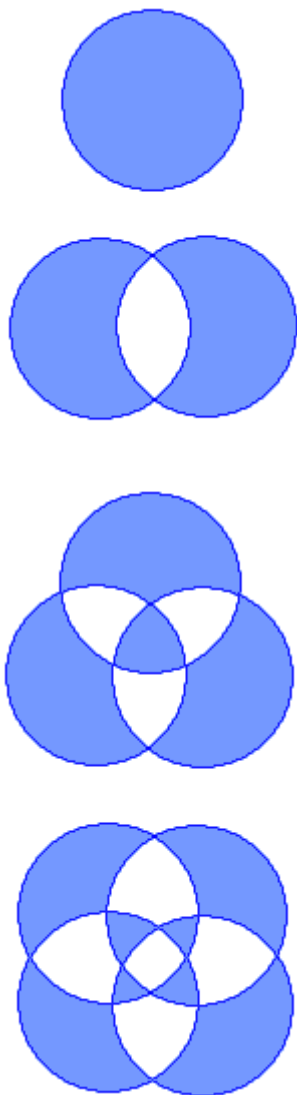
¹⁶ Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 77/11

Důkaz indukcí II¹⁷

Zadání:

Dokažte, že mapy v rovině, které vytvářejí n kružnic, z nichž každá protíná všechny ostatní, lze vybarvit dvěma barvami.

Vypracování:



Použijeme důkaz matematickou indukcí.

1. Pro jednu kružnici věta platí, stačí vybarvit vnitřní oblast kružnice jinou barvou než je barva roviny.
2. Předpokládejme, že platí i pro k kružnic. Chceme dokázat, že pokud přikreslíme další kružnici (protínající všechny kružnice ostatní), budeme moci vybarvit nově vzniklé mapy tak, aby žádná nezanikla. Toho dosáhneme tím, že při přidání každé nové kružnice (s barvou jinou než má pozadí (rovina)), prohodíme barvy uvnitř jednotlivých průniků s původními kružnicemi.

Tím je důkaz matematickou indukcí ukončen a věta platí.

Literatura

- Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990.
 Janourová, E. – Janura, M.: Matematika, průvodce učivem základní a střední školy. Rubico, Olomouc 1999.
 Beran, L. – Ondráčková, I.: Prověřte si své matematické nadání. SNTL Praha 1988.

¹⁷ Ovarko, O. – Calda, E.: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha 1990. Strana 77/8

OBSAH

Důkazy matematických vět	1
Přímý důkaz I	2
Přímý důkaz II	3
Přímý důkaz III	4
Přímý důkaz IV	4
Důkaz nepřímý I	5
Důkaz sporem I	6
Důkaz sporem II	6
Důkaz nepřímý II	7
Důkaz nepřímý III	7
Důkaz sporem III	8
Přímý důkaz V Dirichletův přihrádkový princip	9
Důkaz indukcí I	9
Důkaz indukcí II	10
Literatura	10
OBSAH	11